Méthode de Monte-Carlo

Théorème
On note $D = [0,1]^d \subset \mathbb{R}^d$ *que l'on munit de la mesure de Lebesgue. Soient* $f \in \mathbb{L}^1(D)$ *et* $(Y_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées définies de loi uniforme sur* D *définies sur l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*. On pose pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $X_n = f \circ Y_n$ *et* $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$*. Alors*

(i) la suite $(\overline{X}_n)_{n\geq 1}$ *converge* $\mathbb{P}$*-presque sûrement vers* $I = \int_D f(x)dx$ *;*

(ii) si de plus $f \in \mathbb{L}^\infty(D)$ *alors pour tout* $0 < \varepsilon \leq \frac{\|f\|_2^2}{\|f\|_\infty}$ *on a*

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - I| > \varepsilon) \leq 2\exp\left(\frac{-n\varepsilon^2}{4\,\|f\|_2^2}\right).$$

Démonstration :

(i) Les variables aléatoires Y_n sont indépendantes, les X_n le sont donc aussi. De plus les X_n sont de même loi et par le théorème de transfert et l'hyptohèse que $f \in \mathbb{L}^1(D)$, elles admettent une moyenne. On va donc pouvoir appliquer la loi forte des grands nombres à la suite $(X_n)_n$. Calculons l'espérance de X_1, par le théorème du transfert et puisque les Y_n sont de loi uniformes sur $[0,1]^d$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)d\mathbb{P}_{Y_n}\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathbb{1}_{[0,1]^d}(x)dx = I.\end{aligned}$$

Donc d'après la loi forte des grands nombres on a :

$$\overline{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} I$$

(ii) • Remarquons que puisque $f \in \mathbb{L}^\infty(D)$ on a $f \in \mathbb{L}^2(D)$ et $X_1 \in \mathbb{L}^2(\Omega)$.

• **Première majoration de** $\mathbb{P}(\overline{X}_n - I > \varepsilon)$ **:** posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n = \overline{X}_n - I$ et soient $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ on a alors :

$$\mathbb{P}(e_n > \varepsilon) = \mathbb{P}(e^{\alpha e_n} > e^{\alpha\varepsilon}) \underset{Markov}{\leq} \frac{\mathbb{E}(e^{\alpha e_n})}{e^{\alpha\varepsilon}}.$$

Et,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{\alpha e_n}) = \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\alpha}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - I\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\alpha}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - I)\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n}\exp\left(\frac{\alpha}{n}X_i - I\right)\right] \\
&= \prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\alpha}{n}X_i - I\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\alpha}{n}X_i - I\right)\right]^n.
\end{aligned}$$

Or, une étude rapide la fonction $t \mapsto e^{-t}(1+t+t^2)$ montre que pour tout $|t| \leq 1$ on a :

$$e^t \leq 1 + t + t^2 \tag{1}$$

. De plus pour presque tout $x \in D$ on a par inégalité triangulaire :

$$|f(x) - I| \leq |f(x)| + \left|\int_D f(x)dx\right| \leq 2\,\|f\|_\infty .$$

Ainsi on peut appliquer (1) dès que $\alpha \leq \frac{n}{2\|f\|_\infty}$, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{\alpha e_n}) &\leq \left[E\left(1 + \frac{\alpha}{n}(X_1 - I) + \frac{\alpha^2}{n^2}(X_1 - I)^2\right)\right]^n \\
&\leq \left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\mathbb{V}(X_1)\right]^n \\
&\leq \left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\mathbb{E}(X_1^2)\right]^n \\
&\leq \left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\,\|f\|_2^2\right]^n \\
&\leq \exp\left(\frac{\alpha^2}{n}\,\|f\|_2^2\right).
\end{aligned}$$

Car $\ln(1+t) \leq t$ dès que t est positif. On obtient alors pour tout $\alpha \leq \frac{n}{2\|f\|_\infty}$

$$\mathbb{P}(e_n > \varepsilon) \leq \exp(-\alpha\varepsilon)\exp\left(\frac{\alpha^2}{n}\,\|f\|_2^2\right) = \exp\left[\alpha\left(\alpha\frac{\|f\|_2^2}{n} - \varepsilon\right)\right].$$

• **Optimisation de α :** On cherche α_0 minimisant $\alpha\left(\alpha\frac{\|f\|_2^2}{n} - \varepsilon\right)$, c'est-à-dire $\alpha_0 = \frac{\varepsilon n}{2\|f\|_2^2}$. On a alors

$$\alpha_0 \leq \frac{n}{2\,\|f\|_\infty} \iff \varepsilon \leq \frac{\|f\|_2^2}{\|f\|_\infty}$$

Donc pour tout $0 < \varepsilon \leq \frac{\|f\|_2^2}{\|f\|_\infty}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(e_n > \varepsilon) &\leq \exp\left[\frac{\varepsilon n}{2\,\|f\|_2^2}\left(\frac{\varepsilon}{2} - \varepsilon\right)\right] \\
&\leq \exp\left(\frac{-\varepsilon^2 n}{4\,\|f\|_2^2}\right).
\end{aligned}$$

- De même on montre que pour tout $0 < \varepsilon \leq \frac{\|f\|_2^2}{\|f\|_\infty}$:

$$\mathbb{P}(-e_n < -\varepsilon) \leq \exp\left(\frac{-\varepsilon^2 n}{4\,\|f\|_2^2}\right).$$

Ainsi on obtient bien que pour tout $0 < \varepsilon \leq \frac{\|f\|_2^2}{\|f\|_\infty}$:

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - I| > \varepsilon) \leq \exp\left(\frac{-\varepsilon^2 n}{4\,\|f\|_2^2}\right).$$

$\square$

Bonus (Intervalle de confiance)

On suppose $f \in \mathbb{L}^2(D)$, par la loi forte des grands nombres :

$$\Delta^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \mathbb{V}(X_1).$$

Donc d'après le théorème central limite et le lemme de Slutsky :

$$\frac{\sqrt{n}}{\Delta_n}(\overline{X}_n - I) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Dès lors dès que n est assez grand :

$$\mathbb{P}\left[\overline{X}_n - 1.96\frac{\Delta_n}{\sqrt{n}} \leq I \leq \overline{X}_n + 1.96\frac{\Delta_n}{\sqrt{n}}\right] = 0.95$$